Références :
Algèbre, Xavier Gourdon

Prop. *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors tout sous-espace propre de f est stable par g.*

Déf. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **normal** si u et u^* commutent.

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration. Soit $x \in F$. Par hypothèse, $u(x) \in F$ donc

$$\forall y \in F^\perp, 0 = u(x).y = x.u^*(y).$$

Ceci est vrai pour tout $x \in F$, on a donc $u^*(y) \in F^\perp$. Or cette égalité est valable pour tout $y \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u^*. □

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Démonstration. Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par u^*, donc d'après le lemme qui précède, $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$. □

Lemme. Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeur propre réelle. Dans toute base B orthonormale de E, la matrice de u a la forme

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0.$$

Démonstration. Ecrivons

$$M = [u]_B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On a $b \neq 0$ puisque u est sans valeur propre réelle. Comme u est normal, ${}^tMM = M{}^tM$. Cette égalité matricielle nous permet d'avoir les deux égalités suivantes :

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \text{ et } ab + cd = ac + bd.$$

La première égalité entraîne que $b = c$ ou $b = -c$. Or si $b = c$, alors M est symétrique ce qui est impossible puisque u est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$. La deuxième équation devient donc $2(a-d)b = 0$ et comme $b \neq 0$, on a $a = d$. On obtient donc bien le résultat. □

Théo. *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale B de E telle que*

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} (*)$$

où

- *pour tout $i \in [\![1, r]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$*
- *pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

- Si u admet une valeur propre réelle λ, on pose $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id_E)$. Le sous-espace vectoriel $F = E_\lambda^\perp$ est stable par u et par u^* par les deux premiers lemmes. Comme $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$ commutent et que $\dim(F) \leq n-1$, il existe une base orthonormale B_1 de F telle que $[u_{|F}]_{B_1}$ a la forme (*). Si B_2 désigne une base orthonormale de E_λ, on voit alors que $B = (B_2, B_1)$ est une base orthonormale de E dans laquelle $[u]_B$ est de la forme (*).

- Sinon u est sans valeur propre réelle. Soit $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (on a donc $\alpha^2 - \beta < 0$) du polynôme caractéristique de u. (Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.) Notons $N = KerQ(u)$.
  Montrons que $N \neq \{0\}$.
  Comme Q est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire $Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit M la matrice de u dans une base de E. Le nombre complexe λ est racine de Q, et comme Q divise le polynôme caractéristique de M, on a $\det(M - \lambda I_n) = 0$. Donc

  $$\det Q(u) = \det Q(M) = \det(M - \lambda I_n)\det(M - \overline{\lambda} I_n) = 0.$$

  Il existe donc une valeur propre de $Q(u)$ nulle. Il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $Q(u)(x) = 0$. Ainsi $N \neq \{0\}$.
  On a clairement que N est stable par u. Le sous-espace vectoriel N est également stable par u^* car la commutativité de u et de u^* entraîne la commutativité de $Q(u)$ et de u^* et donc N est aussi stable par u^*. Posons $v = u_{|N}$. On a $v^* = u^*_{|N}$, de sorte que l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)_{|N}$ est symétrique et admet donc une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $x \in N$ avec $x \neq 0$ tel que $v^*v(x) = \mu x$. Posons $F = Vect(x, u(x))$. Comme u n'admet pas de valeur propre réelle, x et $u(x)$ forment une famille libre donc $\dim(F) = 2$. Le sous-espace vectoriel F est stable par u puisque comme $x \in N$, on a $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x$ (**).
  Montrons que F est stable par u^*
  L'égalité (**) montre que $F = Vect(u(x), u^2(x)$ ($\beta \neq 0$ car Q est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$). On a donc

  $$u^*(u(x)) = v^*v(x) = \mu x \in F$$

  et comme u et u^* commutent, on a aussi

  $$u^*[u^2(x)] = u \circ u^*[u(x)] = u(\mu x) = \mu u(x) \in F.$$

  Ainsi, F est stable par u^*.
  Comme $(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}$, $u_{|F}$ est un endomorphisme normal. On utilise le dernier lemme. On a donc, dans une base orthonormée B_2 de F, la matrice de $u_{|F}$ est de la forme

  $$\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

  On sait de plus que F est stable par u^*, donc $F^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$ d'après le premier lemme. On a aussi que, F étant stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*. Donc $(u_{|F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$, ainsi, $u_{|F^\perp}$ est normal. Comme $\dim(F^\perp) = n - 2 < n$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base B_1 orthonormale de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{|F^\perp}$ a la forme (*).
  La base $B = (B_1, B_2)$ est alors une base orthonormale dans laquelle la matrice de u a la forme (*).

□

Leçons possibles : 153 - 154 - 160